Exercice n° 1

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\times 0+(-2)\times 6+3\times(-4)=-24$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=-24}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times 2+(-2)\times\left(-\sqrt{2}\right)+3\times\frac{3}{2}$

$=\left(-\frac{4}{3}\right)+2\sqrt{2}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{19}{6}+2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 2

I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[CD]$.

AB= AC = AD = BD= DC = a.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$.

$= a.a.\cos\frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$.

$=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$..

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$.

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

$\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$.

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}.=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

$\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)$ et (DC) sont orthogonales. De même pour les droites (AC) et (BD) ainsi que (AD) et (BC).

3)a) On a: $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$.

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CJ}$

$=\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}CD^2$

$=0-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=0}$ et $\boxed{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ}=0}$.

b) La droite (IJ) est la perpendiculaire commune des deux droites (AB) et (CD).

c) d_1 : distance entre (AB) et (CD) . d_1 = IJ

or $IJ^2= JB^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ (IJB triangle rectangle en I)

$=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.(CJB trgle rectgle en J)

$\Rightarrow$ $IJ=\frac{a}{\sqrt{2}}$

De même $d((AC),(BD))=d((AD),(BC))=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Exercice n° 3

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P $\Rightarrow$ P: $x-y+d=0$.

$A(1,-2,3)\in P \Leftrightarrow 1-(-2)+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

D'où : $\boxed{P:\ x-y-3=0.}$

Exercice n° 4

(CD) est perpendiculaire à P d'où $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal de P avec $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$.

Donc P: $x-4y+3z+d=0$

$A(0,1,-2)\in P \Rightarrow 0-4\times1+3\times(-2)+d=0 \Rightarrow d=10$

D'où : $\boxed{P:\ x-4y+3z+10=0}$.

Exercice n° 5

$\Delta\perp P\Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite Δ

D'où $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\y=-2-3t\\z=t\end{cases}, t\in IR$

Exercice n° 6

Le point D(1 ;-2 ;3) est le projeté orthogonal de O sur P

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P avec.

Donc P: $x-2y+3z+d=0$.

$D\in P \Leftrightarrow 1-2\times(-2)+3\times3+d=0 \Leftrightarrow d=-14$.

D'où : $\boxed{P:\ x-2y+3z-14=0}$.

Exercice n° 7

• P: $x-y+z+1=0\Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

P': $-x+y-z=0\Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'

$\Rightarrow \vec{n}'=-\vec{n}\Rightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ *sont colineaires* $\Rightarrow$P'//P

• P: $2x+y+z-2=0\Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P.

P': $-x+y-z=0\Rightarrow \vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P'.

$\vec{n}\wedge\vec{n}'\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}\neq\vec{0}\Rightarrow \vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *ne sont pas colineaires*

Donc P et P' sont sécants.

Exercice n° 8

Une équation cartésienne d'un plan admettant $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal est $z+d=0$ avec $d\in IR$ .Par exemple le plan d'équation $z=0$ (pour $d=0$).

a) On a le plan d'équation $x=1$ a pour vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et le plan d'équation $y=0$ a pour vecteur normal $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Comme $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ sont orthogonaux alors ces deux plans sont perpendiculaires.

b) $M(x,y,z)\in(x=1)\cap(y=0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

On pose $z=t$ avec $t\in IR$, on aura un système d'équation paramétrique de leur droite d'intersection est

$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t\end{cases}$, avec $t\in IR$

Exercice n° 9

• $A(1,0,2)$ et P: $2x-y+z-2=0$ donc d

$(A,P)=\dfrac{|2\times1-0+2-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

$\boxed{d(A,P)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}}$

• $A(0,0,-3)$ et P: $2x-2y+z+5=0$ donc d

$(A,P)=\dfrac{|2\times0-2\times0-3+5|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{d(A,P)=\dfrac{2}{3}}$.

• Déterminons tout d'abord une équation cartésienne du plan P = (BCD) :

On sait que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ est un vecteur normal de P, avec

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc P: $-x-y-z+d=0$.

$B \in P \Leftrightarrow d=1$.

D'où : P: $x+y+z-1=0$. Par suite d

$$(A,P) = \frac{|-1+1+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{d(A,P)=0}$.

Exercice n° 10

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.

Exercice n° 11

● Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec : $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

avec : $(a',b',c') \neq (0,0,0)$

On a: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A B et C définissent un plan P .

3) P = (ABC) : $x+y+z+d=0$

$A \in P \Leftrightarrow 1+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

D'où : $\boxed{\text{P: } x+y+z-2=0}$

Exercice n° 12

P: $x+y+z+1=0$; P': $x-y+2z-1=0$

● $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

● $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

● $\vec{w} \neq \vec{0}$ donc P et P' sont sécants suivant la droite Δ ayant pour équations cartésiennes

$$\Delta : \begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x-y+2z-1=0 & (2) \end{cases}.$$

Posons $z=t$, on aura: $(1)+(2) \Rightarrow 2x+3z=0$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}z$

$(1)-(2) \Rightarrow 2y-z+2=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}z - 1.$

Donc $\Delta : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \\ z = t \end{cases}$ .t ∈ IR

D'où la droite d'intersection de P et P' est

$$\Delta\left(A(0,-1,0); \vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice n° 13

$\vec{u}\vec{v} = 0$.

Montrons que : $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}$

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, posons $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et

$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, on aura : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}bc'-cb'\\a'c-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}abb'-a'b^2-a'c^2+acc'\\bcc'-b'c^2-b'a^2+aa'b\\aa'c-c'a^2-c'b^2+cbb'\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}a(bb'+cc')-a'(b^2+c^2)\\b(cc'+aa')-b'(c^2+a^2)\\c(aa'+bb')-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

On sait que: $\vec{u}\vec{v}=aa'+bb'+cc'=0$

Donc on aura: $bb'+cc'=-aa'$; $cc'+aa'=-bb'$ et $aa'+bb'=-cc'$

En remplaçant dans les expressions des composantes de $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$; on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-aaa'-a'(b^2+c^2)\\-bbb'-b'(c^2+a^2)\\-ccc'-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$

Finalement $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-a'(a^2+b^2+c^2)\\-b'(a^2+b^2+c^2)\\-c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$

D'autre part on a: $\|\vec{u}\|^2=a^2+b^2+c^2$ d'où $\|\vec{u}\|^2\vec{v}$ $\begin{pmatrix}a'(a^2+b^2+c^2)\\b'(a^2+b^2+c^2)\\c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$.

Conclusion: Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

Exercice n° 14

- On a:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{1}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$$

.

De même $\|\vec{v}\|=1$ et $\|\vec{w}\|=1$.

Aussi on a: $\vec{u}\vec{v}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}-\frac{16}{81}=0$.

$\vec{u}\vec{w}=\frac{8}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{32-4-28}{81}=0$.

$\vec{v}\vec{w}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{4-32-28}{81}=0$.

D'où $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ et $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{w}=\vec{v}\vec{w}=0$.

Par suite la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée

On a:

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}=\vec{w}$ donc la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe

Exercice n° 15

● $\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(AM)\perp(AB)$.

Donc l'ensemble des points M est la droite qui est perpendiculaire à (AB) au point A .

● $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(AM)//(AB)$ d'où M décrit la droite (AB) .

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0$

$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$M∈Plan (A, $\vec{u};\vec{v}$)

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$M∈la droite passant par A et ⊥au plan P(A, $\vec{u};\vec{v}$).

Exercice n° 16

- L'aire A_1 du triangle CEH:

CEH triangle rectangle en H⇒ $A_1=\frac{1}{2}HC\times HE=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

- L'aire A_2 du triangle CFH:

On a CF = CH = FH = $\sqrt{2}$ donc CFH est un triangle équilatéral

Donc $A_2=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{FH}\wedge\overrightarrow{FC}\right\|=\frac{1}{2}$

$\left\|\overrightarrow{FH}\right\|\left\|\overrightarrow{FC}\right\|.\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- L'aire A_3 du triangle CDF:

CEH triangle rectangle en C ⇒ $A_3=\frac{1}{2}CF\times CD=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice n° 17

$M_O(\vec{F})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

● a) $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{F}$

$=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\underbrace{\overrightarrow{HA}\wedge\vec{F}}_{\overrightarrow{HA}\text{ et }\vec{F}\text{ colinéaires}}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\vec{0}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\right\|=\left\|\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}\right\|=\left\|\overrightarrow{OH}\right\|\times\left\|\vec{F}\right\|\times\underbrace{\left|\sin(\pm\frac{\pi}{2})\right|}_{1}=OH\times\left\|\vec{F}\right\|$$

D'où $\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\|=OH\times\|\vec{F}\|$

b) Soit $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ deux forces de même vecteur $\vec{F}$ et de même support Δ appliquées respectivement en A_1 et A_2 et O un point quelconque de l'espace.

$M_O(\vec{F_1})=\overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F}=\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_1}\right)\wedge\vec{F}$

$=\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{A_2A_1}\wedge\vec{F}$

(*or* $\overrightarrow{A_2A_1}\wedge\vec{F}=\vec{0}$ *car* A_2 *et* A_1 *sont deux points de* Δ *et* $\vec{F}$ *un vecteur directeur de* Δ; *donc* $\overrightarrow{A_2A_1}$ *et* $\vec{F}$ *colineaires*)

Donc $M_O(\vec{F_1})=\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F}=M_O(\vec{F_2})$

Remarque :

(interprétation :cela veut dire que le moment dépend de la force et de son support et ne dépend pas du point A)

● $M_{O'}(\vec{F})=\overrightarrow{O'A}\wedge\vec{F}=\left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA}\right)\wedge\vec{F}$

$=\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

$=-\overrightarrow{OO'}\wedge\vec{F}+M_O(\vec{F})$

$=\vec{F}\wedge\overrightarrow{OO'}+M_O(\vec{F})$

● Soit $\vec{F_1}$; $\vec{F_2}$ *et* $\vec{F_3}$ trois forces appliquées respectivement en A_1 ; A_2 et A_3 et de supports respectives Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3

- S'il y'en a deux supports confondus ;alors le faite que les trois forces ont une résultante nulle ($\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$)implique que le troisième support est // aux autres et par suite les supports sont coplanaires .
- Supposons maintenant que les trois supports sont distincts deux à deux. cela nous permet de supposer (tenant compte de la remarque faite en 1) b)) que A_3 n'appartient ni à Δ_1 ni à Δ_2 .

Le faite que le système formé par ces trois forces a un moment nul par rapport à un point O de l'espace donne

$M_O(\vec{F_1})+M_O(\vec{F_2})+M_O(\vec{F_3})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F_2}+\overrightarrow{OA_3}\wedge\vec{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{F_2}+\overrightarrow{OA_3}\wedge(-\vec{F_1}-\vec{F_2})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_3})\wedge\vec{F_1}+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_3})\wedge\vec{F_2}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}+\overrightarrow{A_3A_2}\wedge\vec{F_2}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}=\vec{F_2}\wedge\overrightarrow{A_3A_2}$

$\left(\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}\neq\vec{0}\,car\ A_3\notin\Delta_1;A_1\in\Delta_1\ et\ \vec{F_1}\ directeur\ de\ \Delta_1\right)$

Or

$\overrightarrow{A_3A_1}\wedge\vec{F_1}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_1)$

$\vec{F_2}\wedge\overrightarrow{A_3A_2}$ *est un* vecteur normal au plan $P(A_3;\Delta_2)$

$\Rightarrow P(A_3;\Delta_1)\,//\,P(A_3;\Delta_2)$ (vecteur normal *commun*)

et par suite $P(A_3;\Delta_1)=P(A_3;\Delta_2)$ (1) [// *et point commun*]

Un travail analogue donnera :

$P(A_2;\Delta_1)=P(A_2;\Delta_3)$ (2)

$P(A_1;\Delta_2)=P(A_1;\Delta_3)$ (3)

Tenant compte du fait que $A_1\in\Delta_1$; $A_2\in\Delta_2$ et $A_3\in\Delta_3$; **Les résultats (1) ;(2)et(3) permet de conclure que les supports Δ_1 ; Δ_2 et Δ_3 sont coplanaires.**

Exercice n° 18

● On sait que :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal de P

$\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de Q

Et $\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq0$ donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

● $\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

●

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et D est perpendiculaire à R d'où $\vec{u}$ est un vecteur normal de R et puisque $O\in R$ on aura R : $\boxed{x+7y+5z=0}$

●

$I(x,y,z)\in R\cap D\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=0\ (1)\\2x-y+z-3=0\ (2)\\x+7y+5z=0\ (3)\end{cases}$

(1) + 2×(2) donne $5x-z-6=0$ donc :

$\boxed{z=5x-6.}$ (4)

(1) + 3×(2) donne $7x-y-9=0$ donc :

$\boxed{y=7x-9.}$ (5)

Remplaçant (4) et (5) dans l'égalité (3) on aura :

$x+7(7x-9)+5(5x-6)=0 \Leftrightarrow 75x-93=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{93}{75}=\frac{31}{25}$

D'où : $y=7\times\frac{31}{25}-6=-\frac{8}{25}$ et $z=5\times\frac{31}{25}-9=\frac{1}{5}$

conclusion : $\boxed{I(\frac{31}{25},-\frac{8}{25},\frac{1}{5})}$

Exercice n° 19

● $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}$

Or : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}=0\times(-1)-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}\neq 0$

D'où A, B, C et D sont non coplanaires

● $AB=2$; $AC=2$; $AD=2$

$BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$DC=\sqrt{0^1+2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$

$BD=\sqrt{1^1+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

conclusion : comme A,B,C et D sont non coplanaires

et AB=AC=AD=BC=DC=BC

il résulte que ABCD est un tétraèdre regulier

● Soit h la hauteur du tétraèdre ABCD on a :

$$h=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}=\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{0^2+(-2\sqrt{2})^2+2^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{h=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

●

$a\in[0,\sqrt{2}]$; $P_a : z=a$

a) $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P_a

* Intersection de P_a et la droite (AC)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AC}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (AC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point F (x_F ,y_F ,z_F) tels que les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_F=-\alpha\\y_F=-1-\alpha\\z_F=-\sqrt{2}\alpha\\z_F=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{F\ (\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (AD)

$\overrightarrow{N}\bullet\overrightarrow{AD}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (AD) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sor sécants en un point G (x_G ,y_G ,z_G) tels que ces coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x_G=-\alpha\\y_G=1+\alpha\\z_G=-\sqrt{2}\alpha\\z_G=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

On a donc : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{G\ (\frac{a}{\sqrt{2}},1-\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

* Intersection de P_a et la droite (BC)

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=0+0-\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0$

D'où (BC) et P_a ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en un point I (x_I,y_I ,z_I) tels que les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite (BC) et l'équation du plan P_a donc le système :

$$\begin{cases}x_I=\alpha\\y_I=-1-\alpha\\z_I=-\sqrt{2}\alpha\\z_I=a\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

ce qui donne : $-\sqrt{2}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{I\ (-\frac{a}{\sqrt{2}},-1+\frac{a}{\sqrt{2}},a)}$

b) $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{IH}$

ce qui montre que FGHI est un parallélogramme **(1)**

Aussi on a : $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}a\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2-\sqrt{2}a\\0\end{pmatrix}=0$

Donc (FI) et (FG) sont perpendiculaires **(2)**

D'après **(1)** et **(2)** : FGHI est un rectangle

● a) $a\in\left[0,\sqrt{2}\right]\Rightarrow 2-\sqrt{2}.a>0$

$\Rightarrow FG=\left|2-\sqrt{2}a\right|=2-\sqrt{2}a$ et $IF=\sqrt{2}a$

d'où $P(a)=2\times(FG+IF)=2\times(2-\sqrt{2}a+\sqrt{2}a)=4$

$\Rightarrow \boxed{P(a)=4}$

$S(a)=FG\times IF=(2-\sqrt{2}a)\times\sqrt{2}a=2\times(\sqrt{2}a-a^2)$

$\Rightarrow\boxed{S(a)=2\times(\sqrt{2}a-a^2)}$

b) Posons $S(x)=2(\sqrt{2}x-x^2)$

On a : $S'(x)=2\times(\sqrt{2}-2x)$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)	0	↗	1	↘	0

S (a) admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ atteint 1

Remarque : pour cette valeur de a FGHI est un carré

Exercice n° 20

●

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$:vecteur normal de P

$\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$:vecteur normal de Q

$\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{-3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires d'ou P et Q sont sécants suivant une droite D

●

a)

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Leftrightarrow$

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$

Comme a et b non tous nuls alors :

$(3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$ est l'équation cartésienne d'un plan F_{ab}

$M(x,y,z)\in P\cap Q\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y+5z-1=0\ (1)\\2x-3y+2z-2=0\ (2)\end{cases}$

$\Rightarrow a\times(1)+b\times(2)=0$

$\Rightarrow M\in plan\,F$

Conclusion :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$ **est l'équation cartésienne d'un plan F_{ab} contenant tout point M (x, y, z) $\in P\cap Q$ donc contenant la droite D**

b) D'après la question 2) a) tout plan ayant une équation cartésienne de la forme :

$a\times(3x-2y+5y-1)+b\times(2x-3y+2z-2)=0$

contient la droite D;et pour qu'il contient le point I (2, 5, 0) il suffit que: a(6-10+0-1)+b(4-15+0-2)=0

$\Rightarrow -5a-13b=0\Rightarrow$ Par exemple pour a = 13 et b = − 4 d'ou :

$R: 13\times(3x-2y+5z-1)+(-5)\times(2x-3y+2z-2)=0$

$\Rightarrow\boxed{R: 29x-11y+55z-3=0}$

● S d'ou une équation cartésienne de S

d'après 2) a) pour (a, b) ≠ (0,0) :

$S: (3a+2b)x-(2a+3b)y+(5a+2b)z-(a+2b)=0$ *est un plan contenant D ;*

Pour que S et P soient perpendiculaires il suffit que le produit scalaire de leurs vecteurs normaux soitt nul ce qui donne

$\overrightarrow{n_S}\bullet\overrightarrow{n_P}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3a+2b\\-2a+3b\\5a+2b\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow 9a+6b+4a+6b+25a+10b=0$

$\Rightarrow 19a+11b=0\Rightarrow 19a=-11b$

Donc pour a=11 et b=-19 S et P sont perpendiculaires

D'ou : $\boxed{S: -5x+35y+17z+27=0}$

4)a) **rectifier (I au lieu de A)**

• $d(I,P)=\frac{|6-10+0-1|}{\sqrt{9+4+25}}=\frac{5}{\sqrt{38}}$

• $d(I,S)=\frac{|-10+175+0+27|}{\sqrt{5^2+35^2+17^2}}=\frac{192}{\sqrt{1539}}=\frac{192}{9\sqrt{19}}$

$\Rightarrow\boxed{d(I,S=\frac{64}{3\sqrt{19}}}$

• Un système d'équation paramétrique de la droite D :

$$D:\begin{cases} x=-11\alpha-\frac{1}{5} \\ y=-4\alpha-\frac{4}{5} \\ z=5\alpha \end{cases} \quad \alpha\in IR$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\-4\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et $J(-\frac{1}{5},-\frac{4}{5},0)$ un point de la droite D donc on a :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{11}{5}\\-\frac{29}{5}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}-29\\11\\55\end{pmatrix}$$ D'ou

$$d(I,D)=\frac{\left\|\overrightarrow{IJ}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\sqrt{29^2+4^2+55^2}}{\sqrt{11^2+4^2+5^5}}=\frac{\sqrt{3987}}{162}$$

$$\boxed{d(I,D)=\frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}}}$$

b)

$$d^2(I,S)+d^2(I,P)=(\frac{5}{\sqrt{38}})^2+(\frac{64}{3\sqrt{19}})^2=\frac{25}{38}+\frac{36864}{1539}$$
$$=\frac{75753:171}{3078:171}=\frac{443}{18}$$

Et on a $d^2(I,D)=(\frac{\sqrt{443}}{3\sqrt{2}})^2=\frac{443}{18}$

D'ou $\boxed{d^2(I,S)+d^2(I,P)=d^2(I,D)}$

Exercice n° 21

● (S) : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$

● (S) : $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=2$

Exercice n° 22

● $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow(-1-x)(-x)+(3-y)(-y)+(-z)(-2-z)=$

$\Leftrightarrow x+x^2-3y+y^2+2z+z^2=0$

$\Leftrightarrow\boxed{(S):x^2+y^2+z^2+x-3y+2z=0}$

2) Une deuxième méthode

Le centre de la sphère est le milieu Ide segment [AB]

Le rayon de la sphère est R= $\frac{AB}{2}$

On a :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\frac{z_A+z_B}{2}\right)\Rightarrow I\left(1,-\frac{3}{2},0\right)$$

$$AB=\sqrt{0^2+1^2++(-4)^2}=\sqrt{9}=3\Rightarrow R=\frac{3}{2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{(S):(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-3)^2=\frac{9}{4}}$$

Exercice n° 23

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+12=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=-12$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-9\prec 0$$

Donc l'ensemble des points M est l'ensemble vide

b)

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+(z-1)^2-1=-5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9=3^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (3, – 2, 1) et de rayon R = 3

c)

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-8=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+3)^2-9=8$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=19=\sqrt{19}^2$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre I (–1, – 1, –3) et de rayon R = $\sqrt{19}$

Exercice n° 24

a)

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$

D'où S est une sphère de centre I (1,1,1) et de rayon $\sqrt{3}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|1-1|}{\sqrt{1+1}}=0\prec\sqrt{3}$ ce qui prouve que S et P sont sécants suivant le cercle ζ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$

b)

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+3)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$$

D'où S est une sphère de centre I (1, – 2, – 3) et de rayon $\sqrt{14}$

On a : $d(I,P)=\dfrac{|2\times1+3\times(-2)-2\times(-3)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

$$d(I,P)=\frac{2}{\sqrt{17}}\prec R=\sqrt{14}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{S et P sont sécants suivant}\\ \text{le cercle de centre H et de rayon r}\end{cases}$$

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{14-\dfrac{4}{17}}=\sqrt{\dfrac{234}{17}}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

On sait que H est le projeté orthogonal de I sur le plan P

D'où $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) sont colinéaires

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{N_P}\ \alpha\in\mathbb{R}\\ H\in P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+2\alpha\\ y_H=-2+3\alpha\\ z_H=-3-2\alpha\\ 2x_H+3y_H-2z_H+1=0\end{cases}\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2+4\alpha-6+9\alpha+6+4\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow\boxed{H\left(\frac{11}{17},-\frac{43}{17},-\frac{45}{17}\right)}$$

c)

$$x^2+y^2+z^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2-1+y^2+z^2=0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

D'où S est une sphère de centre I (1, 0, 0) et de rayon 1

On a : d = $d(I,P)=\dfrac{|1+0|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$

$\Rightarrow$ S et P sont sécants suivant un cercle de centre H et de rayon r

• $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Posons $H(x_H,y_H,z_H)$

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (vecteur normal de P) Sont colinéaires

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{N_P} \ \alpha \in IR \\ H \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 1+\alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = 0 \\ x_H + y_H = 0 \end{cases} \quad \alpha \in IR$$

$$\Rightarrow 1+2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)}$$

Exercice n° 25

$$D : \begin{cases} x = 1+\lambda \ (1) \\ y = 1-\lambda \ (2) \\ z = 2-\lambda \ (3) \end{cases} \quad \lambda \in IR$$

$(1)+(2) \Rightarrow x+y=2$

$(2)-(3) \Rightarrow y-z+1=0$

D'où les deux plans des équations respectifs : $x+y-2=0$ et : $y-z+1=0$ sont sécants su droite D

$x+y-2=0$ et : $y-z+1=0$ sont sécants suivant la droite D

a) le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D donc c'est un vecteur de P car D $\subset$ P

E (1,1 2) est un point de D donc c'est un point de P et comme A $\notin$ D alors on aura $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de P non colinéaire avec $\vec{u}$ par suite les équations paramétriques de P sont :

$$P : \begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = 2-\alpha-\beta \ (\alpha,\beta) \in IR^2 \\ z = 2-\alpha \end{cases}$$

b) On a : $x+y=2$ donc $\boxed{P: x+y-2=0.}$

3) P et Q sont parallèles donc le plan Q à pour équation cartésienne, Q : $x+y+d=0$ or B $(0,0,1) \in Q$

$\Rightarrow d=0$ donc $\boxed{Q: x+y=0.}$

4) a) P et R sont perpendiculaires donc le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ de P est un vecteur de R aussi D est incluse dans R donc $\vec{u}$ est un vecteur de R, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de R il résulte :

R : $x-y+2z+d=0$

Comme E est un point de D et D est incluse dans P

Donc E appartient à P ce qui donne : $1-1+4+d=0$

$\Rightarrow d=-4$ Finalement $\boxed{R: x-y+2z-4=0.}$

$$\Leftrightarrow$$

e aux

$$\frac{|x_I - y_I + 2z_I - 4|}{\sqrt{6}} = \frac{|x_I + y_I - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|x_I - y_I + 2z_I - 4| = \sqrt{3}|x_I + y_I - 2|$$

Par exemple on prend I (4, 0, $\sqrt{3}$)

Donc la sphère de centre I (4, 0, $\sqrt{3}$) et de rayon $\sqrt{2}$ est tangente aux plans P et R

c) De même le centre J (x_J, y_J, z_J) d'une sphère tangente aux plans R et P vérifie : $d(I,P) = d(I,R)$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{|x_J + y_J - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_J + y_J|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|x_J + y_J - 2| = |x_J + y_J|$$

Par exemple on prend J (1, 0, 0)

Donc la sphère de centre J (1, 0, 0) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est tangente aux plans P et Q

Exercice n° 26

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui montre que A, B et C ne sont pas alignés

b) A, B et C sont non alignés donc ils définissent un seul plan P

$$1-2\times1+2\times1-1=0 \Rightarrow A \in P$$
$$3-2\times1+2\times0-1=0 \Rightarrow B \in P$$
$$-1-2\times0+2\times1-1=0 \Rightarrow C \in P$$

Les cordonnées de A, B et C vérifient l'équation donc le plan P à pour équation : $x-2y+2z-1=0$

c) on sait que :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ vec normal de P et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ normal de Q

Et $\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-2=-6\neq 0$

Donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ non colinéaires ce qui montre que les deux plans P et Q sont sécants

a) $\bullet d(I_t,P)=\dfrac{|1+2+2t-1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2|1+t|}{3}$

$\bullet d(I_t,Q)=\dfrac{|2-1+2t-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{2|1+t|}{3}$

$\Rightarrow d(I_t,P)=d(I_t,Q)$

b) Pour t = -1 on trouve $d(I_{-1},P)=d(I_{-1},Q)=0$

Donc I_{-1} appartient à P et à Q

c) pour $t\neq -1$: $d(I_{-1},P)=d(I_{-1},Q)\neq 0$

Donc il existe une seule sphère S_t de centre I_t et de rayon $R=\dfrac{2|1+t|}{3}$ qui est tangente au même temps à P et à Q

On prend t = 2

Le point de contact H de la sphère S_2 et de P est le projeté orthogonal de I_2 (1, – 1, 2) sur le plan P

Posons, $H(x_H,y_H,z_H)$

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{I_2H}=\alpha\overrightarrow{n_P}\ \alpha\in IR\\ H\in P\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+\alpha\\ y_H=-1-2\alpha\\ z_H=2+2\alpha\\ x_H-2y_H+2z_H-1=0\end{cases}\quad\alpha\in IR$$

$\Rightarrow 1+\alpha-2(-1-2\alpha)+2(2+2\alpha)-1=0$

$\Rightarrow 6+9\alpha=0\Rightarrow\alpha=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$